Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), \quad y(0,\mu) = y^0$$

μ – некий малый параметр. Например,

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}0027yt + t + y^{0{,}0027}$$

Где μ, очевидно, 0,0027:

$$\frac{dy}{dt} = \mu yt + t + y^{\mu}$$

Решать такое ДУ сложно. А можно его как-нибудь упростить? Положить μ=0 – тогда правая часть упростится, ух как упростится. Т.е. решать вот такое вот

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = f(\overline{y},t,0), \quad \overline{y}(0) = y^0$$

В нашем случае это будет

$$\frac{dy}{dt} = t + 1$$

Не могу не рассказать тру стори. Был у нас в 11-м классе один товарищ-приколист. Заходит он как-то на английский:

Приколист: Здорово, гнилые!!!

Учитель: Выйди и зайди нормально!

Приколист (выходит, заходит): Разрешите войти, товарищ…

Вот тут у нас то же самое – с правой частью $0{,}0027yt + t + y^{0{,}0027}$ чёт не особо нам хочется решать («здорово, гнилые!»), поэтому «выйди и зайди нормально», т.е. полагаем μ=0 и получаем

$$\frac{dy}{dt} = t + 1$$

Вот так уже норм! Такое решить очень легко:

dy= dt(t+1)=d(t+1)*(t+1)=d$\frac{(t+1)^2}{2}$,

y=$\frac{(t+1)^2}{2}$+const.

Мы получили решение в нулевом приближении - $\overline{y}(t)$.

А теперь вернемся к исходному ДУ. Можно ли, зная $\overline{y}(t)$, получить решение уже для малых, но нулевых μ? Т.е. мы считаем, что для малых μ решением будет $\overline{y}(t)$ + некоторая малая добавка:

$$y(t,\mu) = \overline{y}(t) + \varepsilon(t,\mu),$$

где *ε(t,μ)* =>0 при $\mu \to 0.$

Эта формулы называется асимптотической.

86. Что такое асимптотическая формула?

Физических аналогий тут придумать можно много. К примеру, μ может отвечать за трение. Оно мало, но всё-таки хотелось бы его как-нибудь учесть в решении.

В реальных задачах μ конечно => в отличие от всяких разностных схем, где мы можем устремлять шаг по сетке к нулю и получать сколь угодную нам точность, в асимптотических в силу конечности μ есть предельная точность.

89. Может ли асимптотическая формула обеспечить произвольную степень точности? Если да, то приведите пример.

Так что нет и примера не надо ☺

Обычно для получения решения раскладывают f(,,) и y() в ряд Тейлора

$$f(y,t,\mu) = f_0(y,t,0) + \mu f_1(y,t,0) + \mu^2 f_2(y,t,0) + \ldots,$$
$$y(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots$$

После чего находят $y_1(t)$, $y_2(t)$ по стрёмным формулам. Кстати, как раз в силу конечности μ ряд для y(t) может и не сойтись. Так что

88. Может ли асимптотический ряд быть расходящимся?

Может, запросто.

Обычно, так как всё это решается на компуктерах, а компудахтеры могут работать лишь с конечными рядами, а не бесконечными, то в разложении ограничиваются k+1 слагаемыми

Теперь немного о терминологии.

87. Какие члены асимптотической формулы называются остаточными?
90. Что в асимптотических методах понимается под возмущением?
91. Что такое регулярное возмущение?
92. Что такое сингулярное возмущение?

Возмущение (они же остаточные члены) – это всё то, что мы отбросили, когда переходили от

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), \quad y(0,\mu) = y^0$$

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = f(\overline{y}, t, 0), \quad \overline{y}(0) = y^0$$

Если характер решения не сильно поменялся, то это возмущение регулярное. А если сильно, то сингулярное. Вот, например, вот такие колебания с трением

$$\begin{cases} \mu y'' + \alpha y' + ky = f(t), \\ y(0) = y_0^0; \quad y'(0) = y_1^0, \end{cases}$$

Вообще дифур у нас второго порядка, но если положить μ=0, будет дифур первого ☺ Очевидно, что решение в этом случае поменяется прям сильно, поэтому сингулярное возмущение.

У сингулярных возмущений есть свои приколы:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{dy}{dt} = f(y, t), \quad 0 < t \le T \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

При μ не равным 0 у нас ДУ, а согласно теореме из 4 сема, решение единственное.

А если μ=0, то имеем 0=f(y,t). Это алгебраическое уравнение, и у него запросто может быть несколько решений (у квадратного, например, два): $\overline{y}_i = \phi_i(t)$. К какому из них (единственному!) стремится решение y(t) при μ->0?

Это вот, знаете, как трогательный момент выбора наставника на «Голосе»

(в наставниках, напомню сидят решения уравнения f(y,t)=0).

Теорема: y(t) пойдёт к тому наставнику-$\varphi_i(t)$, если

а) Начальное значение y_0 лежит в т.н. области влияния – область, где интегральные кривые направлены в сторону $\varphi_i(t)$ (это условие обычно несущественно, в отличие от следующего)

б) Выполнено условие устойчивости: $\frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi(t),t) < 0$, которое гораздо удобнее записать и использовать как $\frac{\partial f}{\partial y}|_{y=\varphi(t)} < 0$.

Попутно мы ответили на

93. Какое решение невозмущенного уравнения называется устойчивым?
94. Что такое область влияния (притяжения) корня невозмущенного уравнения?

Потренируемся на примере:

$$\mu \frac{dy}{dt} = y - y^2$$

В данном уравнении

$$f(y,t) = y - y^2$$

И очевидны два корня: y=0 и y=1. Т.е. у нас повернулось два наставника:

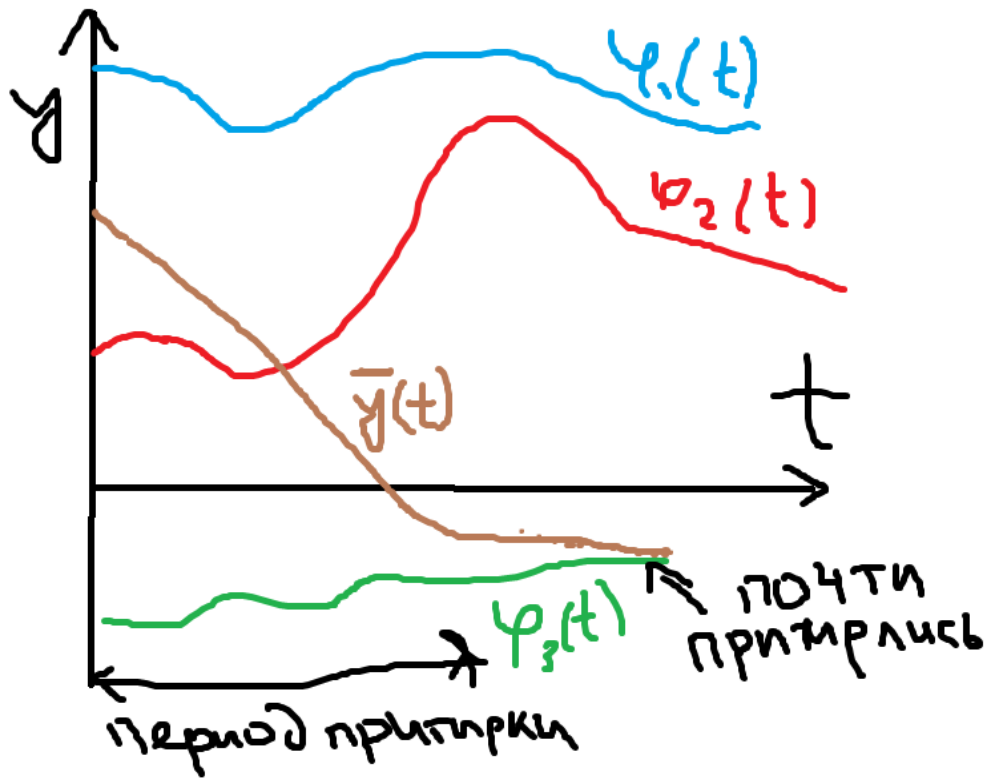
Поэтому проверяем условие $\frac{\partial f}{\partial y}|_{y=\varphi(t)} < 0$. Считаем производную:

$$\frac{\partial(y - y^2)}{\partial y} = 1 - 2y$$

При y=0 получаем 1, т.е. >0 – не, этот наставник неустойчив, не пойду к нему.

При y=0 получаем -1, т.е. <0 – о, устойчивость, побежали к нему!

Правда, и тут есть нюанс – решение не побежит к своему наставнику бегом, а потребуется некое время на притирку:



И вот область, где они различаются достаточно сильно (то, что у меня «период притирки»), по-боголюбовски называется «пограничным слоем».
С точки зрения математики, это означает, что остаточный член ε(t,μ)

$$y(t,\mu) = \overline{y}(t) + \varepsilon(t,\mu)$$

уже не стремится к нулю при μ->0 (а начинает стремиться к нулю лишь при t->∞).
Про пограничный слой нет в билетах, но это было на лекциях, запросто могут спросить.